РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ В ЦИФРОВЫХ КАНАЛАХ СВЯЗИ

Песков С.Н., директор МВКПК, к.т.н.,
Ищенко А.Е., директор ООО «ТехноСат»

Октябрь 2010 г.

В статье приводятся аналитические методы расчета энергетических характеристик цифрового канала связи с M-QAM модуляцией и расчет вероятности ошибки от отношения несущая шум (C/N) или ее цифрового нормированного значения Eb/No

Нормированная версия *S/N* для цифровых каналов связи. Назначение любого канала связи – это передача той или иной информации. В данном случае рассматриваются широкополосные каналы связи, предназначенные для передачи как видео, так и аудио сигналов. Из теории связи известно, что существуют две основные причины снижения достоверности передачи [1]. Первая – снижение отношения сигнал/шум (*S/N* - Signal to Noise или *SNR* - Signal Noise Ratio). Вторая причина – искажение сигнала. Сигналом может быть информационный сигнал, видеоимпульс или модулированная несущая. Применительно к аналоговым сигналам используются понятия интермодуляционных искажений (например, хорошо всем известные *CTB*, *CSO* и канальные искажения). В цифровых же системах связи большей частью пользуются понятием межсимвольной интерференции. В настоящей статье рассматривается только расчет вероятности ошибки (*BER* - Bit Error Rate) в зависимости от реализуемого значения *S/N*.

Из теории передачи аналоговых сигналов известно, что одним из критериев качества сигнала является *S/N*, определяемое, как отношение средней мощности сигнала (*S*) к средней мощности шума (*N*). В цифровых системах связи чаще используется нормированная версия *S/N*, обозначаемая как *Eb/No*, где *Eb* – энергия бита. Ее можно описать, как мощность сигнала *S*, умноженную на время передачи бита информации *Tb*. *No* – это спектральная плотность мощности шума, и ее можно выразить как мощность шума *N*, деленную на ширину полосы *W*. Поскольку время передачи бита и скорость передачи битов взаимно обратны, *Tb* можно заменить на 1/*R*: *(где R - битовая скорость)*

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{ST_b}{N/W} = \frac{S/R}{N/W} \;. \tag{1}$$

Перепишем выражение (1) так, чтобы было явно видно, что отношение *Eb/No* представляет собой отношение *S/N*, нормированное на ширину полосы и скорость передачи битов:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{S}{N}\left(\frac{W}{R}\right) \;. \tag{2}$$

Одной из важнейших метрик качества в системах цифровой связи является график зависимости вероятности появления ошибочного бита P_B (*BEP* - Bit Error Probability) от *Eb/No*. На рис.1 показан «водопадоподобный» вид большинства подобных кривых. При $Eb/No \geq X_0$, $P_B \leq P_0$. Безразмерное отношение *Eb/No* – это стандартная качественная мера производительности систем цифровой связи. Следовательно, необходимое отношение *Eb/No* можно рассматривать как метрику, позволяющую сравнивать качество различных систем: чем меньше требуемое отношение *Eb/No*, тем эффективные процесс детектирования при данной вероятности ошибки.

У неспециалистов в области цифровой связи может возникнуть вопрос о полезности

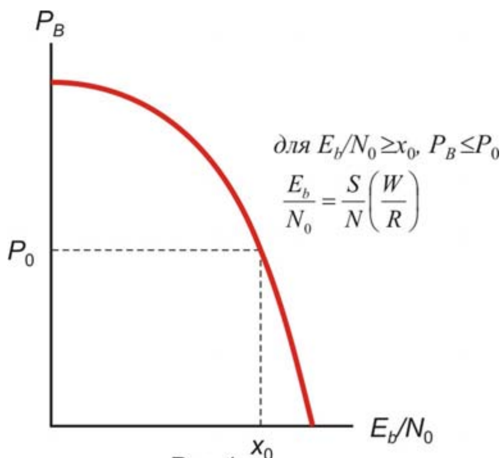

Рис.1

параметра *Eb/No*. Для инженеров, занимающихся аналоговой техникой, отношение *S/N* – удобный и привычный критерий качества: числитель (*S*) представляет меру мощности сигнала (легко измеряется любым ваттметром, а в согласованном режиме – вольтметром или анализатором спектра), которую желательно сохранить, а знаменатель (*N*) – ухудшение шумовой мощности, под которой все чаще стали понимать тепловую шумовую мощность и мощность помех» (также легко измеряется тем же ваттметром или анализатором спектра в оговариваемой полосе частот). Отношение *S/N* интуитивно воспринимается как мера качества. Зачем же для цифровых систем нужна другая метрика – отношение энергии бита к спектральной плотности мощности шума? Коротко остановимся на этом вопросе.

Применительно к аналоговым сигналам удобно пользоваться понятием мощности, т.к. сигнал данного вида непрерывен во времени. Аналоговый сигнал представляется бесконечным по длительности, который не требуется разграничения во времени. Неограниченно длительный аналоговый сигнал содержит бесконечную энергию (энергия является произведением мощности на время); следовательно, использование энергии – не самый удобный способ описания характеристик такого сигнала. Как отмечалось выше, мощность легко измеряется (при фиксированном сопротивлении линии передачи достаточно измерить напряжение сигнала) и удобна для практического использования.

В цифровых же системах связи мы передаем (и принимаем) символы путем передачи некоторого сигнала в течение конечного промежутка времени передачи символа – *Ts*. Применительно к одному информационому символу мощность (усредненная по времени) зависит от скорости передачи . Для сигналов с дискретной структурой нужна «достаточно хорошая» метрика в пределах конечного промежутка времени. Гораздо более удобным параметром описания цифровых сигналов является энергия, т.е. мощность, проинтегрированная по времени.

Таким образом, именно нормированный параметр *Eb/No* является самой удобной метрикой для цифровых систем. А иногда и единственно возможной, как например, для формата DVB-T2.

Цифровой символ – это транспортное средство, передающее цифровое сообщение. Сообщение может содержать 1 бит (двоичное сообщение), два (четверичное),... 10 бит (1024-ричное). В аналоговых системах нет ничего подобного такой дискретной структуре сообщения. Аналоговый информационный источник – это бесконечно квантованная волна. Для цифровых систем критерий качества должен позволять сравнивать одну систему с другой именно на битовом уровне. Следовательно, описывать цифровые сигналы в терминах *S/N* практически бесполезно, т.к. символ может переносить разное количество бит. Для конкретики рассуждений положим, что для установленной вероятности возникновения ошибки (*BER*) в цифровом двоичном сигнале требуемое отношение *S/N* равно 20. Поскольку двоичный сигнал имеет однобитовое значение, требуемое отношение *S/N* на бит равно 20 единицам. Теперь предположим, что наш сигнал уже является 1024-ричным, с тем же прежним требуемым *S/N* = 20. Теперь, поскольку сигнал имеет 10-битовое значение, требуемое отношение *S/N* на один бит равно всего 2. Данный пример рассуждений показывает, что для цифровых систем связи необходимо использовать именно параметр *Eb/No*, а не *S/N*.

Что такое шум? Коль скоро в нормированный параметр *Eb/No* входит понятие спектральной плотности мощности шума *No*, имеет смысл дать понятие мощности шума в общем виде.

Среди всех источников шума наиболее распространенным на практике и наиболее широко используемым в качестве модели случайного (хаотического) процесса является шум, описываемый нормальным (гауссовским) распределением. Он возникает в результате одновременного воздействия многих независимых случайных источников. Типичным примером шума с нормальной плотностью, то есть равномерным, является тепловой шум, обусловленный броуновским движением электронов в проводнике. Шум подобного типа принято называть белым. Для специалистов по цифровой технике идеальный белый шум проще представить в виде последовательности бесконечно коротких импульсов со случайной амплитудой и следующих через случайные промежутки времени. Такая последовательность импульсов будет обладать неограниченным однородным спектром. (Напомним читателям, что спектр бесконечно короткого импульса бесконечен).

В цифровой технике для анализа тех или иных процессов часто пользуются понятием спектральной мощности шума – *No*, Вт/Гц. Постоянство спектральной плотности идеального белого шума означает, что в бесконечно широкой полосе частот средняя мощность шума бесконечно велика. На практике же, полоса пропускания системы всегда ограничена, что ограничивает и мощность шума в этой полосе частот. Поэтому значение спектральной плотности за пределами полосы пропускания не влияет на анализируемые параметры сигнала и шума.

Иными словами, реальный белый шум соответствует идеальному белому шуму, прошедшему через фильтр. Он уже имеет ограниченный спектр (эквивалент импульсов с конечной длительностью), а при ограниченной ширине спектра его мощность в конечной полосе частот также конечна. Обычно при расчетах мощности *N* реального белого шума в полосе частот *W* (Гц) используют спектральную плотность мощности шума *No* = *N/W* (Вт/Гц) и абсолютную температуру источника шума *T* ($К^0$), где $К^0 = С^0 + 273^0$. При этом наибольшая мощность шума, которую можно получить от теплового источника (т.е. в согласованном режиме работы) равна:

$$N = kTW \quad , \tag{3}$$

где $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ (Дж/К) – постоянная Больцмана.

На практике много удобнее работать с децибельными уровнями (только складываются и вычитаются):

$$N = -228{,}6 + 10\lg(T) + 10\lg(W)\text{, дБ·Вт} \tag{4}$$

$$N_0 = -228{,}6 + 10\lg(T)\text{, дБ·Вт/Гц} \tag{5}$$

Взаимосвязь мощностей и энергии сигнала для цифровых систем основывается на простом и понятном выражении (2). Учитывая, что по определению энергия сигнала *E* = *STo*, а мощность шума *N* = *NoW*, где To – время передачи сигнала, получаем [2]:

$$E / N_0 = SWT_o / N = WT_o S / N \,. \tag{6}$$

Величина *WTo (то есть, время передачи одного символа, умноженное на ширину полосы)* иногда именуется базой сигнала и в данном случае является коэффициентом пересчета отношения энергий сигнала и шума в отношение их средних мощностей.

При передаче цифрового сигнала с форматом модуляции *M*-QAM (*M* – формат модуляции или число элементов пространства сигналов при цифровой модуляции) число уровней амплитуд L определяется как

$$L = \sqrt{M}\ , \tag{7}$$

а энергия символа сигнала определится по формуле:

$$E_S = E_b \log_2 L\ . \tag{8}$$

Очевидно, что при передаче двоичных сигналов $E_S = Eb$, а при передаче многоуровневых импульсов в основной полосе, совпадающей с полосой Найквиста $W_N = 1/2Tb$, мощность символа $S = (E_b/T_b)\log_2 L$ и мощность шума равно $N = N_0(1/2T_b)$. Следовательно,

$$\frac{S}{N} = 2(\log_2 L)\frac{E_b}{N_o} \tag{9}$$

Или, в более привычной для нас логарифмической форме:

$$S/N = E_b/N_o + 10\lg(m)\ , \tag{10}$$

где $m = 2(\log_2 L) = \log_2 M$– коэффициент мапинга (число бит на символ информации).

Например, для 64QAM сигналов разница между S/N и E_b/N_0 составит 7,8 дБ.

Среди показателей, характеризующих отношение мощностей, широко используется также отношение несущая/шум (C/N), которое показывает, во сколько раз мощность C принимаемой модулированной высокочастотной (ВЧ) несущей на выходе приемного фильтра с полосой больше мощности шума N, порождаемого совместным действием всех источников шума данного тракта. Отношение C/N является удобным параметром при расчетах энергетики на входе приемника. Приведем полезную зависимость:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{C}{N} + 10\lg\frac{W}{f_S \cdot m}\text{, дБ.} \tag{11}$$

где fs- символьная скорость.

Следует также ввести и корректирующий коэффициент, позволяющий определить отношение энергии, приходящейся на 1 информационный бит, к шуму в полосе 1 Гц с учетом кодирования кодом Рида-Соломона:

$$D = \frac{C}{N} - 10\lg\frac{204}{188} = \frac{C}{N} - 0{,}35 \tag{12}$$

Иными словами, для учета введения Рида Соломона расчетное значение E_b/N_0 должно быть понижено на величину 0,35 дБ.

В ряде случаях может пригодится и другая полезная формула пересчета:

$$\frac{C}{N} = \frac{E_b}{N_0} + 10\lg\left(\frac{\log_2 M}{1+a}\right), \tag{13}$$

где a – коэффициент скругления спектра (фактор roll-off), физический смысл которого понятен из рис.2. Выражение (13) записано в предположении, что реальная шумовая полоса для идеальной QPSK/QAM системы занимает полосу частот $W = (1+a)\cdot f_S$ (что в большинстве

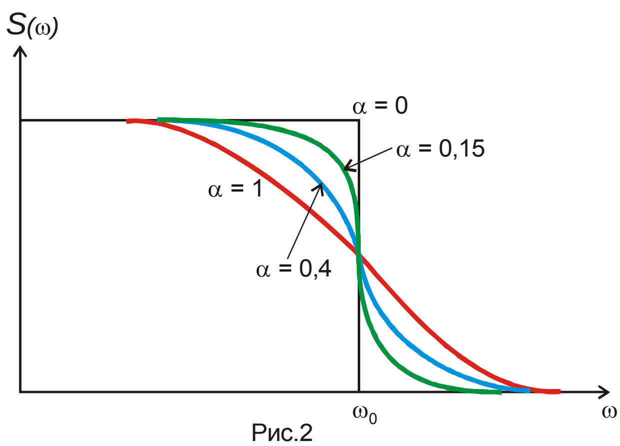

Рис.2

случаях и наблюдается на практике), а $C = E_b \cdot \log_2(M) \cdot f_S$.

Пример 1. Для лучшего восприятия

выше изложенного материала целесообразно привести численный пример расчетов энергетических расчетов, аналогичный приведенному в [3]. Допустим, что используется QAM система со следующими параметрами: символьная скорость: f_S = 6,875 МГц, коэффициент скругления спектра: a = 0,15 (DVB-C), шумовая полоса приемной системы (IRD) W = 8 МГц; констелляционный размер M = 64; мощность несущей составляет -25 дБмВт (83,75 дБмкВ). Требуемое отношение C/N = 23 дБ.

Напомним читателям формулы пересчета из дБмВт в дБмкВ

$$U_{[\partial Б мкВ]} = 108{,}75 + P_{[\partial Б мВт]} \qquad (14)$$

и для удобства будем приводить численные значения в той и другой системе отсчета.

1. Энергия на бит информации:

$$E_b = C - 10\lg\left[\log_2(M) \cdot f_s\right] = 101{,}15 \text{ дБмВт (7,6 дБмкВ).}$$

2. Шумовая мощность:

$$N = C - C/N = -48{,}00 \text{ дБмВт (60, 75 дБмкВ).}$$

3. Спектральная плотность шумовой мощности:

$$N_0 = N - 10\lg(W) = -118{,}03 \text{ дБмВт (-9,28 дБмкВ).}$$

4. Нормированное отношение Eb/No:

$$E_b / N_0 = E_b - N_0 = 16{,}88 \text{ дБ.}$$

5. Сигнал в IRD проходит через косинусно-квадратичный фильтр, полоса которого пропорциональна символьной скорости f_S, в следствие чего реальная шумовая мощность на выходе фильтра несколько понизится:

$$N_{REC} = N + 10\lg(f_s / W) = -48{,}66 \text{ дБмВт (60,09 дБмкВ).}$$

Таким образом, шумовая мощность снизилась на 0,66 дБ. Следует отметить, что спектральная плотность мощности шума *No* осталась неизменной ($N_0 = N_{0(REC)}$= -118,03 дБмВт или -9,28 дБмкВ).

6. Сигнал уже сформирован косинусно-квадратичным фильтром в передатчике, но его мощность дополнительно снижается за счет конечного значения коэффициента скругления спектра a фильтра Найквиста в приемнике. Поэтому сигнал на выходе тюнера будет рассчитываться как:

$$C_{REC} = C + 10\lg\left(1 - \frac{a}{4}\right) = -25{,}17 \text{ дБмВт (85,58 дБмкВ).} \qquad (15)$$

где a – коэффициент скругления приемного фильтра.

Заметим, что энергия, приходящаяся на бит информации, также снизится на 0,17 дБ, то есть:

$$E_{b(REC)} = E_b + 10\lg\left(1 - \frac{a}{4}\right) = -101{,}32 \text{ дБмВт (7,43 дБмкВ).}$$

Таким образом, отношение C/N в приемнике (IRD) может быть определено как:

$\frac{C_{REC}}{N_{REC}} = 23{,}49$ дБ и $\frac{E_{b(REC)}}{N_{0(REC)}} = 16{,}71$ дБ.

По сути дела, новые полученные значения привели нас к мощностным пара-метрам, т.е., при необходимости может быть записано выражение, связывающее отношение несущая/шум и сигнал/шум на выходе приемника:

$$\frac{S}{N} = \frac{C}{N} + 10\lg\left(1 - \frac{a}{4}\right). \tag{16}$$

На основании проведенных рассуждений можем сразу записать конечные соотношения:

$$\frac{C_{REC}}{N_{REC}} = \frac{C}{N} + 10\lg\left[\frac{\left(1 - \frac{a}{4}\right)}{\frac{f_s}{W}}\right], \text{ дБ и} \tag{17}$$

$$\frac{E_{b(REC)}}{N_{0(REC)}} = \frac{E_b}{N_0} + 10\lg\left(1 - \frac{a}{4}\right), \text{ дБ.} \tag{18}$$

7. Таким образом, для случая *C/N* корректирующий фактор зависит от коэффициента скругления спектра *a*, символьной скорости f_S и шумовой полосы системы *W*, используемой для определения шумовой мощности. Однако, если ширина занимаемой полосы частот используется как шумовая полоса системы, то уравнение (17) упрощается к виду:

$$\frac{C_{REC}}{N_{REC}} = \frac{C}{N} + 10\lg\left[\frac{\left(1 - \frac{a}{4}\right)}{\left(\frac{1}{1+a}\right)}\right], \text{ дБ} \tag{19}$$

и корректирующий фактор становится константой, зависящей только от фильтрующего параметра *α* (коэффициента скругления спектра). Например, для DVB-C ($a = 0{,}15$): $C_{REC}/N_{REC} = C/N + 0{,}44$ и для DVB-S ($a = 0{,}35$): $C_{REC}/N_{REC} = C/N + 0{,}91$.

Осталось остановиться на факторе влияния сверточного кода. Действительно, корректирующий коэффициент *FEC* (Forward Error Correction) может принимать значения от 1/2 до 7/8. Чем меньше численное значение *FEC*, тем больше потеря скорости передачи информации. Например, при *FEC* = 1/2, Eb/N_0 уменьшится в 2 раза (3 дБ). Физически это означает, что половина номинальной мощности сигнала расходуется на *FEC*. Таким образом, реализуемое значение *Eb/No* должно быть увеличено на 10lg(1/*FEC*) по отношению к C/N. Например, для RC = 1/2 фактор влияния FEC составит 3,0 дБ, а для RC = 7/8 уже 0,58 дБ (для RC = 1 корректирующий фактор равен нулю).

Вероятность ошибки при приеме цифровых сигналов является очень важным параметром, по которому ведут оценку возможности его передачи по тому или иному каналу связи. Сразу оговоримся, что вероятность ошибки (Bit Error Probability – *BEP*) и скорость возникновения битовой ошибки (Bit Error Rate – *BER*) – это несколько разные понятия. Тем не менее, их численные значения весьма близки и, ведя речь про *BEP* (P_B), всегда подразумевают *BER*, т.к. это физическая величина, регистрируемая измерительными приборами. Точно также мы будем поступать и в данном случае. Вероятность ошибки в общем случае равна сумме вероятностей всех возможностей ее появления. Мы же, как и ранее, будем рассматривать воздействие только основного источника появления ошибки – аддитивного белого гауссовского шума ((Additive White Gaussian Noise – AWGN).

Выражения, достаточно полно описывающие вероятность ошибки *Pb,* весьма громоздки. Тем не менее, с весьма небольшой погрешностью (порядка 0,1 дБ) они могут быть упрощены. Например, наиболее краткой и удобной формулой является функция:

$$P_b\left(\frac{E_b}{N_0}\right) \approx 2\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)\cdot erfc\left[\sqrt{\frac{3\log_2(M)}{2(M-1)}\cdot\frac{E_b}{N_0}}\right], \text{ед.} \tag{20}$$

Для прямоугольного множества, гауссова канала и приема с помощью согласованных фильтров, вероятность появления битовой ошибки при модуляции M-QAM, где $M = 2^k$ и k – четное число, выражение (20) может быть записано в расчетном виде:

$$P_b \approx \frac{2(1-L^{-1})}{\log_2 L}\cdot Q\left[\sqrt{\left(\frac{3\log_2 L}{L^2-1}\right)\frac{2E_b}{N_0}}\right]. \tag{21}$$

Здесь, как и ранее $L=\sqrt{M}$ - количество уровневых отсчетов, а Q(x) представляет собой гауссов интеграл ошибок и часто используется при описании вероятности с гауссовой плотностью распределения. Определяется эта функция следующим образом:

$$Q(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du. \tag{22}$$

Во избежание недоразумений для читателей, знакомых с теорией вероятности, отметим, что гауссов интеграл ошибок может определяться несколькими способами. При этом все определения одинаково пригодны для описания вероятности ошибки при гауссовом шуме. *Q(x)* напрямую не вычисляется в аналитическом виде и обычно приводится в виде справочных таблиц. Это обстоятельство в определенной мере тормозит развитие машинных методов расчета цифровых каналов связи (например, расчет диаметра рефлектора SAT приемной антенны для DVB-S сигналов). Тем не менее, при определенных ограничениях, функция *Q(x)* аппроксимируется более простыми выражениями. По мнению авторов, наиболее удачной аппроксимацией для $x>3$ является довольно простая функция, пригодная для дальнейших расчетов:

$$Q(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{23}$$

Приведем пример практического использования формул по расчету вероятности приема.

Пример 2. Требуется рассчитать вероятность ошибки *BER* для 64QAM сигнала с C/*N* = 26 дБ. Скорость кодирования *CR* = 3/4. Гауссов канал приема.

Решение:

1. Обобщая все формулы пересчета, вычисляем требуемое *Eb/No* через требуемое *C/N*:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{C}{N} = 10\lg\left(\frac{204}{188}\right) - 10\lg(m) + 10\lg\left(\frac{1}{RC}\right) = 19{,}82 \text{ дБ (96 ед.).} \tag{24}$$

2. Подставляем численное значение *Eb/No* в формулу (21) для расчета вероятности ошибки ($L = 8$):

$$BER \approx \frac{7}{12} \cdot Q\left[\sqrt{\frac{2E_b}{7N_0}}\right].$$

В нашем случае x = 2/7 (для 64QAM). Подставляя это численное значение в (23), вычисляем расчетное значение $BER = 5 \cdot 10^{-8}$ ($Q(x) = 8{,}5 \cdot 10^{-8}$).

3. Для минимизации расчетов на рис.3 и рис.4 представлены кривые зависимости *BER* от

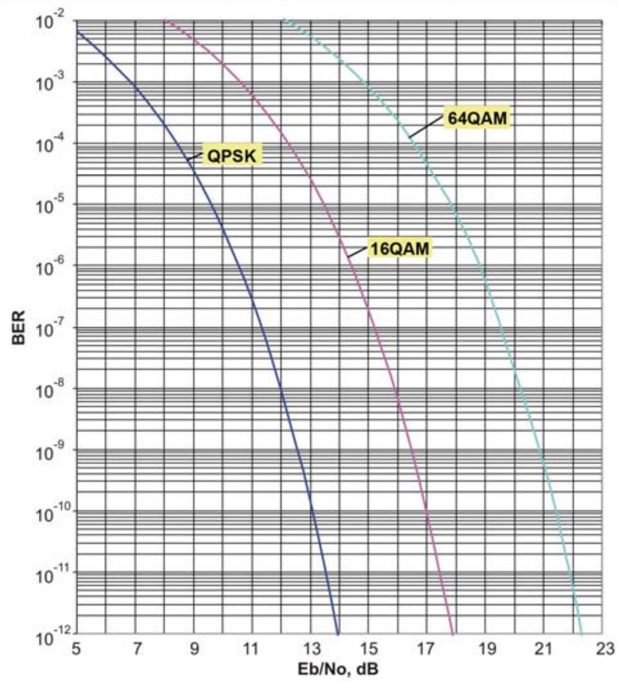

Рис.3

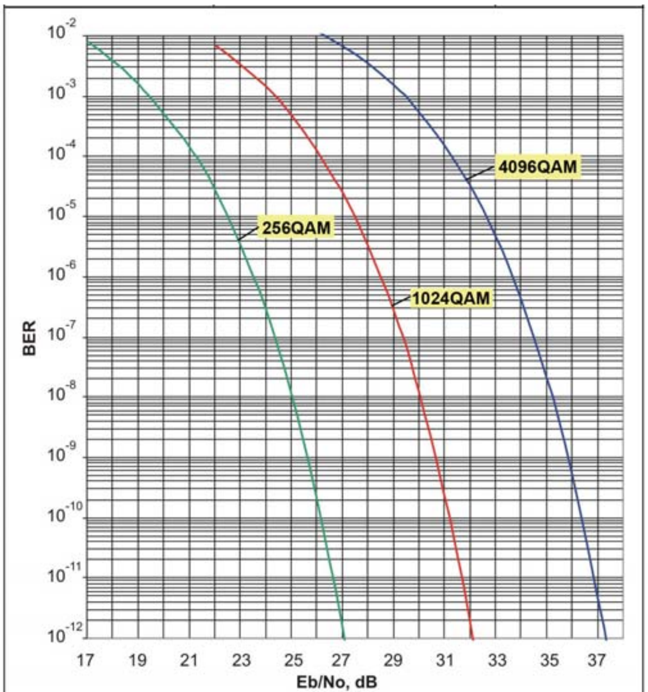

Рис.4

Eb/No в логарифмическом масштабе. С точки зрения практического применения, точность графических отсчетов вполне достаточна, т.к. в любом случае приходится применять коэффициент запаса порядка 3 дБ.

На практике может быть и обратная задача. Например, найти требуемое минимальное значение *C/N* для DVB-C сигнала при формате модуляции 256QAM с a = 0,15. Задано минимальное значение $BER = 10^{-5}$.

В этом случае используют кривую рис.4 и находят *Eb/No* = 22,5 дБ. Далее пользуются нужными формулами пересчета. В данном случае:

$$\frac{C}{N} = \frac{E_b}{N_0} - 10\lg\left(\frac{204}{188}\right) + 10\lg(m) + 10\lg\left(1 - \frac{a}{4}\right) = 31{,}0 \text{ дБ}. \quad (25)$$

Таким образом, освоив несложную методику конвертации из одной системы отсчета в другую, можно решать задачи для широкого класса практических применений.